2. Limites de la fonction inverse

On appelle "limite" la valeur dont la fonction s'approche sans jamais l'atteindre; par exemple quand x s'approche de $+\infty$, la valeur de $\frac{1}{x}$ s'approche de 0. on notera : $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

Propriété 9.2 Pour la fonction inverse, on a les limites suivantes :

- $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$
- $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

Exercice 9.1 Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \to +\infty} \frac{7}{x}$

   $\lim_{x \to +\infty} \frac{7}{x} = 7 \times \frac{1}{\underset{+\infty}{x}} = 7 \times 0^+ = 0^+$

2. $\lim_{x \to +\infty} \frac{-6}{x}$

   $\lim_{x \to +\infty} -6 \times \frac{1}{\underset{+\infty}{x}} = -6 \times 0^+ = 0^-$

3. $\lim_{x \to +\infty} -\frac{5}{x} + 1$

   $\lim_{+\infty} -\frac{5}{x} + 1 = -5 \times \frac{1}{\underset{+\infty}{x}} + 1 = \underbrace{-5 \times 0^+}_{} + 1 = 0^- + 1 = 1$

4. $\lim_{x \to +\infty} \frac{12}{x} - 8$

   $\lim_{+\infty} \frac{12}{x} - 8 = 12 \times \frac{1}{\underset{+\infty}{x}} - 8 = \underbrace{12 \times 0^+}_{} - 8 = 0^+ - 8 = -8$

5. $\lim_{x \to +\infty} -\frac{41}{x} + 9$

   $\lim_{+\infty} -\frac{41}{x} + 9 = -41 \times \frac{1}{\underset{+\infty}{x}} + 9 = \underbrace{-41 \times 0^+}_{} + 9 = 0^- + 9 = 9$

6. $\lim_{x \to -\infty} \frac{3}{x}$

   $\lim_{-\infty} \frac{3}{x} = 3 \times \frac{1}{\underset{-\infty}{x}} = 3 \times 0^- = 3$

7. $\lim_{x \to -\infty} -\frac{9}{x}$

   $\lim_{-\infty} -\frac{9}{x} = -9 \times \frac{1}{\underset{-\infty}{x}} = -9 \times 0^- = +9$

8. $\lim_{x \to -\infty} 7 + \frac{2}{x}$

   $\lim_{-\infty} 7 + \frac{2}{x} = 7 + 2 \times \frac{1}{\underset{-\infty}{x}} = 7 + \underbrace{2 \times 0^-}_{} = 7 + 0^- = 7$

9. $\lim_{x \to -\infty} -20 + \frac{1}{x}$

   $\lim_{-\infty} -20 + \frac{1}{\underset{-\infty}{x}} = -20 + 0^- = -20$

10. $\lim_{x \to 0^+} \frac{2}{x}$

    $\lim_{0^+} \frac{2}{x} = 2 \times \frac{1}{\underset{0^+}{x}} = 2 \times (+\infty) = +\infty$

11. $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{16}{x}$

$\lim\limits_{0^-} \frac{16}{x} = 16 \times \frac{1}{x} = 16 \times (-\infty) = -\infty$
0^-

12. $\lim\limits_{x\to 0^-} -\frac{11}{x}$

$\lim\limits_{0^-} -\frac{11}{x} = -11 \times \frac{1}{x} = -11 \times (-\infty) = +\infty$
0^-

13. $\lim\limits_{x\to 0^+} -\frac{22}{x}$

$\lim\limits_{0^+} \frac{-22}{x} = -22 \times \frac{1}{x} = -22 \times (+\infty) = -\infty$
0^+

14. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{9}{x}$

$\lim\limits_{0^+} \frac{9}{x} = 9 \times \frac{1}{x} = 9 \times (+\infty) = +\infty$
0^+

15. $\lim\limits_{x\to 0^-} -\frac{6}{x}$

$\lim\limits_{0^-} -\frac{6}{x} = -6 \times \frac{1}{x} = -6 \times (-\infty) = +\infty$
0^-

16. $\lim\limits_{x\to 0^+} 6+\frac{22}{x}$

$\lim\limits_{0^+} 6 + \frac{22}{x} = 6 + 22 \times \frac{1}{x} = 6 + 22 \times (+\infty) = 6 + \infty = +\infty$
0^+

17. $\lim\limits_{x\to 0^-} 4-\frac{39}{x}$

$\lim\limits_{0^-} 4 - \frac{39}{x} = 4 - 39 \times \frac{1}{x} = 4 - 39 \times (-\infty) = 4 + \infty = +\infty$
0^-

3. Dérivée de la fonction inverse

Propriété 9.3 La fonction inverse est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et sa dérivée est :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

La dérivée de la fonction inverse est donc toujours négative, la fonction inverse est toujours décroissante, ce qui confirme le tableau de variations donné précédemment.

Exercice 9.2 Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{26}{x}$

$f'(x) = 26 \times \left(\frac{1}{x}\right)' = 26 \times \frac{-1}{x^2} = \frac{-26}{x^2}$

2. $f(x) = -\frac{12}{x}$

$f'(x) = -12 \times \left(\frac{1}{x}\right)' = -12 \times \frac{-1}{x^2} = \frac{+12}{x^2}$

3. $f(x) = -\frac{1}{x}$

$f'(x) = -1 \times \left(\frac{1}{x}\right)' = -1 \times \frac{-1}{x^2} = \frac{+1}{x^2}$

4. $f(x) = 7 + \frac{8}{x}$

$f'(x) = 0 + 8 \times \left(\frac{1}{x}\right)' = 8 \times \frac{-1}{x^2} = \boxed{\frac{-8}{x^2}}$

5. $f(x) = \frac{17}{x} - 9$

$f'(x) = 17 \times \left(\frac{1}{x}\right)' + 0 = 17 \times \frac{-1}{x^2} = \boxed{\frac{-17}{x^2}}$

6. $f(x) = -5 + \frac{31}{x}$

$f(x) = 0 + 31 \times \left(\frac{1}{x}\right)' = 31 \times \frac{-1}{x^2} = \boxed{\frac{-31}{x^2}}$

7. $f(x) = x + \frac{1}{x}$

$f'(x) = 1 + \left(\frac{1}{x}\right)' = \boxed{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$ facultatif

8. $f(x) = 5x - 2 + \frac{14}{x}$

$f'(x) = 5 - 0 + 14 \times \left(\frac{1}{x}\right)' = 5 + 14 \times \frac{-1}{x^2} = \boxed{5 - \frac{14}{x^2}}$

$= \frac{5x^2 - 14}{x^2}$ facultatif

9. $f(x) = -1,25x + \sqrt{3} - \frac{100}{x}$

$f'(x) = -1,25 + 0 - 100 \times \left(\frac{1}{x}\right)' = -1,25 - 100 \times \frac{-1}{x^2}$

$= \boxed{-1,25 + \frac{100}{x^2}} = \frac{-1,25x^2 + 100}{x^2}$ facultatif

10. $f(x) = 5x^2 - 6x + \frac{37}{x}$

$f'(x) = 5 \times 2x - 6 + 37 \times \left(\frac{1}{x}\right)' = 10x - 6 + 37 \times \frac{-1}{x^2}$

$= \boxed{10x - 6 - \frac{37}{x^2}}$

11. $f(x) = -6x^2 - 3,2x + 20 - \frac{4}{x}$

$f'(x) = -6 \times 2x - 3,2 + 0 - 4 \times \left(\frac{1}{x}\right)' = -12x - 3,2 - 4 \times \frac{-1}{x^2}$

$= \boxed{-12x - 3,2 + \frac{4}{x^2}}$

12. $f(x) = \frac{41}{x} + \frac{1}{2}x^2 - 7x + 1$

$f'(x) = 41 \times \left(\frac{1}{x}\right)' + \frac{1}{2} \times 2x - 7 + 0$

$= 41 \times \frac{-1}{x^2} + x - 7 = \boxed{\frac{-41}{x^2} + x - 7}$

13. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + \frac{13}{x}$

$f'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 + \frac{1}{2} \times 2x - 6 + 13 \times \left(\frac{1}{x}\right)' = x^2 + x - 6 + 13 \times \frac{-1}{x^2}$

$= x^2 + x - 6 - \frac{13}{x^2}$

14. $f(x) = -\frac{5}{x} + 4x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{9}{10}x + \frac{3}{7}$

$f'(x) = -5 \times \left(\frac{1}{x}\right)' + 4 \times 3x^2 - \frac{1}{4} \times 2x - \frac{9}{10} + 0$

$= -5 \times \frac{-1}{x^2} + 12x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{9}{10} = \boxed{\frac{5}{x^2} + 12x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{9}{10}}$

4. Signe de la dérivée et tableau de variations

Propriété 9.4 On rappelle que pour les valeurs de x pour lesquelles la dérivée f' est positive, la fonctions f est croissante.
Pour les valeurs de x pour lesquelles la dérivée f' est négative, la fonctions f est décroissante.

Exercice 9.3 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{6}{x} + 2,3$$

1. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

$f'(x) = 6 \times \left(\frac{1}{x}\right)' + 0 = 6 \times \frac{-1}{x^2} + 0 = \boxed{\frac{-6}{x^2}}$

2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}^*$

$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ x^2 > 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2} > 0 \Rightarrow \frac{-6}{x^2} < 0$

3. Dresser le tableau de variations de f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
f	$2,3^-$	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$2,3^+$

$\lim\limits_{-\infty} f(x) = 2,3$

$\lim\limits_{+\infty} f(x) = 2,3$

$\lim\limits_{0^-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{0^+} f(x) = +\infty$

Exercice 9.4 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = \frac{4}{x} + 2x^2$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f'(x) = \frac{4(x-1)(x^2+x+1)}{x^2}$$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = 4\times\left(\frac{1}{x}\right)' + 2\times 2x = 4\times\frac{-1}{x^2} + 4x = \frac{-4}{x^2} + 4x$

$= \frac{-4}{x^2} + \frac{4x\times x^2}{x^2} = \frac{-4+4x^3}{x^2} = \frac{4(-1+x^3)}{x^2} = \frac{4(x^3-1)}{x^2}$

Or $(x-1)(x^2+x+1) = x^3+x^2+x-x^2-x-1 = x^3-1$

Donc $\boxed{f'(x) = \frac{4(x-1)(x^2+x+1)}{x^2}}$

2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$x^2>0$ donc $f'(x)$ est du signe de son numérateur

$4>0$

$x-1>0 \iff x>1$

Signe de x^2+x+1 : $\Delta = 1^2 - 4\times1\times1 = 1-4 = -3 < 0$, donc $x^2+x+1>0$

Finalement $f'(x)>0$ ssi $x>1$

3. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	↘	6	↗	$+\infty$

$f(1) = 4 + 2 = 6$

Exercice 9.5 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_-^*$ par :

$$f(x) = x^3 + 11x - 7 - \frac{9}{x}$$

1. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$

$\forall x \in \mathbb{R}_-^*$, $f'(x) = 3x^2 + 11 - 0 - 9\times\left(\frac{1}{x}\right)'$

$= 3x^2 + 11 - 9\times\frac{-1}{x^2} = \boxed{3x^2 + 11 + \frac{9}{x^2}}$

2. En déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-^*$

$\forall x \in \mathbb{R}_-^*$, $f'(x) = \frac{3x^4+11x^2+9}{x^2}$) somme de positifs ⊕) ⊕

$f'(x)>0$. Donc f est croissante sur $\mathbb{R}_-^*$

Exercice 9.6 Une entreprise fabrique des tables de jardin. la production est comprise entre 1 et 30 tables par jour. Toutes les tables fabriquées sont supposées vendues.
Le coût de production, exprimé en euros, de q tables fabriquées est égal à

$$C(q) = q^2 + 50q + 100$$

, où q appartient à l'intervalle $[1;30]$.

1. (a) Quel est le coût de production, en euros, de 20 tables ?

$C(20) = 20^2 + 50\times 20 + 100 = 1500$ €

(b) Calculer le coût **unitaire** de production, en euros, pour 20 tables produites.

$\frac{1500}{20} = 75$ €

2. A chaque quantité q de tables produites, on associe le coût unitaire de production,

$$C_u(q) = \frac{C(q)}{q} = q + 50 + \frac{100}{q}$$

(a) Représenter la fonction C_u sur la calculatrice et déterminer pour quelles quantités de tables produites la coût unitaire est inférieur ou égal à $80e$.

Le coût unitaire est inférieur ou égal à 80€ pour $x \in [\![4;26]\!]$

(b) Démontrer que, pour tout réel q de l'intervalle $[1;30]$,

$$C'_u(q) = \frac{(q-10)(q+10)}{q^2}$$

$\forall q \in [1;30]$,

$C'_u(q) = 1 + 0 + 100 \times \left(\frac{1}{q}\right)' = 1 + 100 \times \frac{-1}{q^2} = 1 - \frac{100}{q^2}$

$= \frac{q^2-100}{q^2}$; Or $(q-10)(q+10) = q^2 - 10^2 = q^2 - 100$.

Donc on a bien $C'_u(q) = \frac{(q-10)(q+10)}{q^2}$

(c) Etudier le signe de C'_u sur l'intervalle $[1;30]$ et dresser le tableau de variation de la fonction C_u

Le dénominateur est positif, donc $C'_u(q)$ est du signe de son numérateur.

$C'_u(q) = \frac{q^2-100}{q^2}$; $q^2 - 100 \geq 0 \iff q^2 \geq 100$
$q > 0$
$\iff q > 10$

q	1		10		30
$C'_u(q)$		−	0	+	
$C_u(q)$	53	↘	70	↗	83,33

$C_u(10) = \frac{10^2 + 50\times 10 + 100}{10} = 70$

(d) Préciser la quantité de tables à fabriquer par jour pour que le coût unitaire soit minimal. Quel est ce coût minimal ?

Il faut fabriquer 10 tables par jour pour que le coût unitaire soit minimal ; il est alors de 70€.